

SOUS-GROUPES DE GL_2 ET ARBRES

JOËL BELLAÏCHE AND GAËTAN CHENEVIER

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous caractérisons tout d’abord les sous-ensembles de l’arbre de Bruhat-Tits de $PGL_2(K)$, K un corps valué complet, qui sont les ensembles de points fixes $C(G)$ d’un sous-groupe G de $GL_2(K)$. Quand le sous-groupe G est irréductible, ce sont exactement les *bandes* bornées de l’arbre. Nous étudions ensuite la forme de la bande $C(G)$, donnant des encadrements de son diamètre et de son épaisseur en fonction d’invariants algébriques de G . Nous donnons deux applications à la théorie des représentations, l’une concernant une généralisation du lemme de Ribet sur les extensions, l’autre la convergence en trace d’une suite de représentations.

ABSTRACT. In this paper, we first characterize the subsets of the Bruhat-Tits tree of $PGL_2(K)$, K a complete valued field, that are the sets of fixed points $C(G)$ of a subgroup G of $GL_2(K)$. When G is irreducible, the $C(G)$ are the “strips” in the tree. We then evaluate the form of the strip $C(G)$, in particular in terms of algebraic invariants of the group G . We give two applications to representation theory, one about a new generalization of Ribet’s lemma on extensions, the other about the trace-convergence of a sequence of representations.

1. INTRODUCTION

Dans tout l’article¹ on fixe un anneau de valuation discrete complet (A, m, k) , K son corps de fractions, et π une uniformisante de A . On note v la valuation de K , normalisée de telle façon que $v(K - \{0\}) = \mathbb{Z}$.

Soit G un groupe, et ρ une représentation $\rho : G \rightarrow GL_d(K)$, que nous supposons dans cette introduction, pour simplifier la discussion, d’image bornée. Cette représentation induit une action par automorphismes sur l’ensemble des sommets \mathcal{X} de l’immeuble de Bruhat-Tits de $PGL_d(K)$. Soit $C(\rho)$ l’ensemble des points fixes de \mathcal{X} sous cette action : c’est ce que Bruhat et Tits appellent une partie “close” de l’immeuble, et que nous appelons le *clos* de ρ . Lorsque G est un sous-groupe de $GL_d(K)$ et ρ est l’injection canonique, on écrit parfois $C(G)$ au lieu de $C(\rho)$. En général, on a $C(\rho) = C(\rho(G))$.

On sait qu’il est possible d’établir un dictionnaire entre les propriétés algébriques de la représentation ρ et les propriétés géométriques de l’ensemble $C(\rho)$. Pour n’en donner ici qu’un exemple, ρ est irréductible si et seulement si $C(\rho)$ est borné. Des fragments de

1. Cet article a été rédigé en 2004, remanié et diffusé en 2006, puis légèrement remanié une seconde fois en 2013. Lors des deux remaniements, Joël Bellaïche a bénéficié des NSF grants DMS 05-01023 et DMS 011-01615 et Gaëtan Chenevier a été soutenu par le CNRS et par le projet ANR-10-BLAN 0114.

ce dictionnaire se trouvent dans Serre ([7]) pour le cas $d = 2$ et dans [1] et [4] pour le cas général. Ce dictionnaire permet, entre autres, suivant une idée de Serre, de donner une preuve conceptuelle et simple du fameux “lemme de Ribet” (affirmant l’existence d’un réseau stable de réduction mod π indécomposable quand ρ est irréductible et $d = 2$, cf. [6]) et d’en donner la généralisation optimale pour d quelconque ([1] et [4]).

Cependant, pour obtenir des résultats plus fins concernant en particulier la construction de réseaux stables sous ρ ayant des propriétés désirées modulo π^n , et non seulement modulo π , il apparaît nécessaire de savoir quelles sont les parties closes de \mathcal{X} qui peuvent apparaître comme clos $C(\rho)$ d’une représentation, autrement dit, quelle est l’image de l’application C . Ceci n’est d’ailleurs pas la seule raison de s’intéresser aux ensembles $C(\rho)$. Par exemple les sommets de cet ensemble paramètrent les A -réseaux de K^n stable par ρ à homothétie près, et il peut être intéressant de compter le nombre de tels réseaux quand celui-ci est fini (e.g. quand K est localement compact et ρ irréductible). De tels dénombrements sont utiles, par exemple, lors de la comparaison des correspondances de Langlands p -adique et modulo p . Par ailleurs, le calcul de certaines intégrales orbitales apparaissant dans la théorie de la formule des trace se ramènent au dénombrement d’un ensemble $C(G)$.

Dans cet article, nous résolvons ce problème pour $d = 2$; autrement dit, nous déterminons complètement les parties de l’arbre de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_2(K)$ qui sont de la forme $C(\rho)$ pour un certain ρ . Il revient évidemment au même de déterminer les ensembles de la forme $C(G)$, où G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(K)$. Le résultat est très simple : ceux des ensembles de la forme $C(G)$ qui sont bornés (c’est le cas le plus délicat, cf. théorème 21, ainsi que la proposition 24 pour le cas général) sont exactement les *bandes* bornées, i.e. les ensembles de points dont la distance à un segment géodésique de \mathcal{X} (le *nerf* de la bande) est majorée par un entier r (l’*épaisseur* de la bande). La preuve occupe la partie 3 de cette article, et repose sur des résultats préliminaires sur les arbres développés dans la partie 2. L’idée en est simple : supposant $C(G)$ borné, on se ramène par des réductions à supposer que G est engendré (topologiquement) par des éléments semi-simples réguliers, et donc que $C(G)$ est une intersection d’ensembles de la forme $C(H)$, où H est un groupe engendré par un élément semi-simple régulier. On montre d’une part que ces ensembles sont des bandes, éventuellement infinies (prop. 18), et d’autre part qu’une intersection de bandes est une bande (prop. 5).

Comme cette description de notre preuve le suggère, on utilise de manière essentielle les propriétés de groupe de Lie de $\mathrm{GL}_2(K)$. D’ailleurs le résultat serait tout différent si l’on cherchait à déterminer les parties de la forme $C(G)$, pour G un sous-groupe du groupe des automorphismes de l’arbre \mathcal{X} ; en effet, toute partie close est de cette forme. Ceci contraste fortement avec la situation pour $d \geq 3$: dans ce cas, le groupe d’automorphismes de l’immeuble est $\mathrm{PGL}_d(K)$, et la détermination des parties de la formes $C(\rho)$ se ramène donc à un problème purement immobilier, sans théorie des groupes. La solution de ce problème (que nous ne connaissons pas) aurait bien sûr des applications analogues

à celles de notre résultat. Notons à ce sujet que la détermination des ensembles de la forme $C(\rho)$, pour d quelconque, mais ρ *résiduellement sans multiplicité* est déjà connue : ce sont exactement les parties closes contenues dans un appartements de \mathcal{X} ([4]).

Dans la suite de cette article, nous essayons de déterminer, pour une représentation irréductible ρ , la forme de la bande $C(\rho)$. Une telle bande est décrite par deux invariants : son diamètre et son épaisseur. Nous donnons des encadrements de ces invariants en fonctions de deux invariants algébriques de ρ , son *indice de réductibilité* $n(\rho)$, et son *indice de multiplicité* $m(\rho)$. Le point le plus délicat, et le plus utile dans les applications, est une minoration du diamètre $d(\rho)$ de $C(\rho)$ en fonction de l'indice d'irréductibilité $n(\rho)$ de ρ : nous montrons $d(\rho) \geq n(\rho)/2$ (théorème 45). On donne de cette minoration deux applications : une généralisation du lemme de Ribet (pour $d = 2$) permettant de construire des extensions non triviales entre caractères modulo π^n et un résultat concernant les notions "convergences en trace" et "convergence physique" généralisant (mais seulement pour $d = 2$) l'un de ceux de [2].

Remerciements. Les auteurs remercient Yves Benoist qui les a aidés pour la preuve de la proposition 4.

2. L'ARBRE DE $PGL_2(K)$

2.1. Définitions. On renvoie à Serre ([7]) pour plus de détails sur ce qui suit.

L'*arbre* de $PGL_2(K)$ est le graphe (non orienté) défini de la manière suivante. L'ensemble des sommets $T = T(K)$ est l'ensemble des classes d'homothéties de A -réseaux dans K^2 . Deux sommets sont voisins si on peut trouver deux réseaux Λ et Λ' les représentant avec $\Lambda \subset \Lambda'$ et $\Lambda/\Lambda' \simeq k$ en tant que A -module. Il est élémentaire et bien connu que ce graphe est un arbre homogène, chaque sommet ayant exactement $|k| + 1$ voisins (même quand $|k|$ est infini).

On note d la distance sur T induite par cette structure de graphe. Si x est un sommet de T , représenté par un réseau Λ , et n un entier, les points de T qui sont à distance de n de x correspondent bijectivement et canoniquement au sous- $A/\pi^n A$ -modules libres de rang un de $\Lambda/\pi^n \Lambda$.

Une *géodésique* est un ensemble de sommets $\{x_i, i \in I\}$ où I est un intervalle de \mathbb{Z} telle que $d(x_i, x_j) = |j - i|$ pour tout i, j dans I . Quand $I = \mathbb{Z}$, une telle géodésique est dite *droite* ou *appartement*. Quand $I = [a, +\infty]$ ou $[-\infty, a]$, on parle de *demi-droites* d'*extrémité* x_a . Quand $I = [a, b]$, on parle de segment d'*extrémités* x_a et x_b .

On dit que deux demi-droites sont *cofinales* si leur intersection est infinie. Il revient au même de demander que cette intersection est une demi-droite. La cofinalité est une relation d'équivalence, donc les classes s'appellent les *bouts* de l'arbre. Le stabilisateur d'un bout est un sous-groupe de Borel de $PGL_2(K)$, et on obtient ainsi une bijection entre l'ensemble des bouts de T et celui des sous-groupes de Borel de $PGL_2(K)$ (ou, ce qui revient au même de $GL_2(K)$), ou si l'on préfère, celui des K -droites dans K^2 (ou

encore, la droite projective sur K). Les droites de T correspondent bijectivement aux sous-groupes de Levi de $\mathrm{PGL}_2(K)$ (ou de $\mathrm{GL}_2(K)$), ou si l'on veut aux décompositions de K^2 en somme directe de deux K -droites.

Comme T est un arbre, étant donnés deux points x et y dans T , il existe un segment et un seul d'extrémités x et y , et on le note $[x, y]$. On dit qu'un ensemble S est *convexe* (ou *clos*) dans T si pour tout x, y dans T , on a $[x, y] \subset S$. Un point d'un convexe S est dit *extrémal* s'il n'a qu'un seul voisin dans S , ou bien si S est réduit à ce point. La *fermeture convexe* d'un sous-ensemble de T est le plus petit convexe le contenant.

Nous utiliserons librement le résultat suivant, qui est facile en utilisant l'axiome du choix : un convexe $S \subset T$ est borné si et seulement s'il ne contient pas de demi-droites.

Comme T est un arbre, étant donnée une partie convexe S de T et x un sommet, il existe un unique point $y \in S$ tel que $d(x, y) = d(x, S) := \min_{z \in S} d(x, z)$. On l'appelle le *projeté* de x sur S .

2.2. Demi-sommets et milieu d'un segment. A tout couple (x, y) de sommets voisins dans T , on associe formellement un point $m_{x,y}$ qu'on appelle un *demi-sommet*, et qu'il convient d'imaginer au milieu de l'arête $[x, y]$. Si DT désigne l'ensemble de tous les sommets et demi-sommets, on définit une distance, encore notée d , sur DT , prolongeant celle de T , en posant pour x, y, z, t dans T :

$$d(m_{x,y}, z) := \min(d(x, z), d(y, z)) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(d(x, z) + d(y, z))$$

puis

$$d(m_{x,y}, m_{z,t}) = \min(d(m_{x,y}, z), d(m_{x,y}, t)) + \frac{1}{2}.$$

La distance $2d$ sur DT est à valeurs entières, et c'est la distance attachée à une unique structure de graphe sur DT , qui fait de DT un arbre bi-homogène : les points de $DT - T$ ont valence 2 (le point $m_{x,y}$ a pour voisins x et y), et les points de T ont valence $|k|+1 > 2$.

Si x et y sont dans T , il existe un point et un seul m dans DT tel que $d(x, m) = d(m, y) = \frac{d(x,y)}{2}$. On l'appelle *milieu* du segment $[x, y]$. Le milieu de $[x, y]$ est dans T si et seulement si $d(x, y)$ est pair.

2.3. Boules. Si $m \in DT$, et r est un réel, on appelle *boule* de centre m et de rayon r et on note $B(m, r)$ l'ensemble des sommets x de T tels que $d(x, m) \leq r$. Une boule ne change pas si l'on remplace r par sa partie entière si m est dans T , et par l'entier le plus proche (en arrondissant au supérieur), si m est dans $DT - T$. Ainsi, toute boule peut être définie avec un rayon entier. Une boule de rayon négatif est vide. Il est facile de voir que le centre d'une boule non vide est bien déterminé, et que son rayon l'est aussi dès lors qu'on lui impose d'être entier.

Si $[x, y]$ est un segment de T , on appelle *boule de diamètre* $[x, y]$ la boule de centre le milieu de (x, y) et de rayon $d(x, y)/2$.

2.4. Bandes.

Définition 1. Si S est une géodésique de T , et r un entier, la *bande de nerf* S et d'épaisseur r est l'ensemble des x dans T tel que $d(x, S) \leq r$.

Remarque 2. - Il est facile de voir que le nerf et l'épaisseur d'une bande sont bien déterminés. En effet, si C est une bande, posons pour $r \geq 0$, $N(r)$ l'ensemble des $x \in C$ tels que $B(x, r) \subset C$. L'épaisseur de la bande C est le plus petit r tel que $N(r)$ est non vide et ce $N(r)$ en est le nerf.

- Une bande est bornée si et seulement si son nerf est fini.

Exemples 3. Une droite, une demi-droite, un segment sont des bandes d'épaisseur nulle. Une boule est une bande. Plus précisément, la boule $B(m, r)$ est la bande de nerf $\{m\}$ et d'épaisseur r si m est dans T , et la bande de nerf $[x, y]$ et d'épaisseur $r - 1$ si $m = m_{x,y}$ est dans $DT - T$

Proposition 4. Une intersection de deux bandes est une bande.

Démonstration — Soient $B(S, r)$ et $B(S', r')$ deux bandes, I leur intersection. On note Z la fermeture convexe de $S \cup S'$. Si z est dans Z , on pose

$$n_z := \min(r - d(z, S), r' - d(z, S')).$$

Nous affirmons d'abord que I est la réunion des boules de centre z dans Z et de rayon n_z :

$$(1) \quad I = \bigcup_{z \in Z} B(z, n_z).$$

En effet, soit x dans $B(z, n_z)$; comme $d(z, S) \leq r - n_z$, $d(x, S) \leq r$ par l'inégalité triangulaire, et donc $x \in B(S, r)$; par symétrie, $x \in B(S', r')$ et donc $x \in I$. Réciproquement, comme S est un segment du convexe Z , pour tout x sommet de l'arbre on a $d(x, S) = d(x, z) + d(z, S)$, où z est le projeté de x sur Z . Si x est dans I , on a $d(x, S) \leq r$, donc $d(x, z) \leq r - d(z, S)$, et de même $d(x, z) \leq r' - d(z, S')$. Donc $d(x, z) \leq n_z$, et $x \in B(z, n_z)$. Ceci prouve (1).

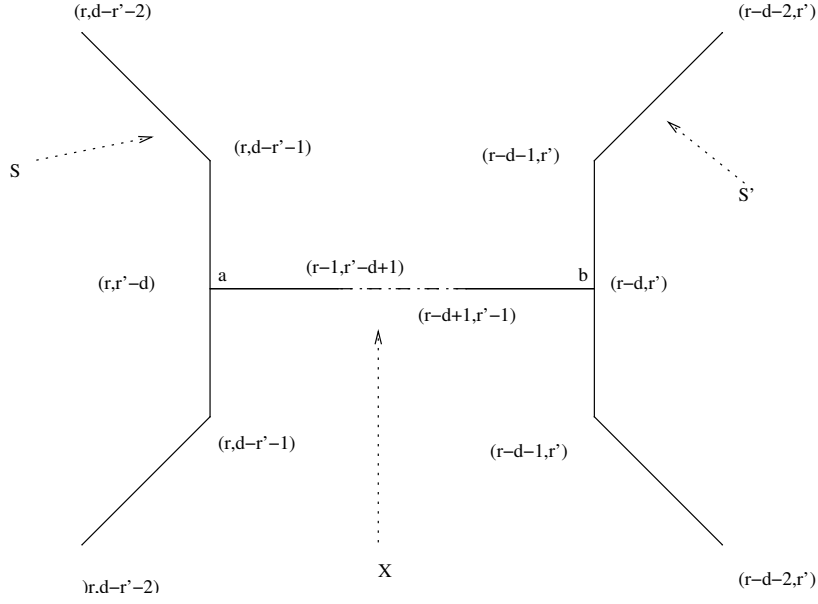
Soit N l'ensemble des z dans Z tels que n_z est maximal (c'est un ensemble non vide puisque n_z est majoré par $\min(r, r')$). Nous allons montrer que I est la bande de nerf N et de rayon n_t pour (n'importe quel) t dans N .

Il y a lieu de distinguer deux cas :

(a) Cas où $S \cap S' = \emptyset$

Dans ce cas on note X le segment réalisant la distance minimale de S à S' , de sorte que $Z = S \cup S' \cup X$. on note d la longueur de X . On distingue trois sous-cas (a priori non exclusifs) :

(i) Sous-cas où N rencontre S .

FIGURE 1. Cas $S \cap S' = \emptyset$

Notons a l'intersection de X avec S . Soit t un point de $N \cap S$. Pour z dans S , on a $n_z = \min(r, r' - d(z, S'))$, donc les points z de S plus proches de a (ou, ce qui revient au même, de S') que t sont aussi dans N . Il vient donc que $N \cap S$ est un segment centré en a .

Par ailleurs, on a $r \leq r' - d$ (puisque $n_a = \min(r, r' - d) \geq n_{a'} = \min(r - 1, r' - d + 1)$ où a' est le voisin de a dans X), et donc et

$$n_a = r = n_t$$

pour tout t dans $N \cap S$.

Nous allons voir que pour tout $z \in Z$, $B(z, n_z)$ est contenu dans un $B(t, n_t)$ pour un certain t dans N . En effet, c'est tautologique pour $z \in N$. Pour $z \in S - (N \cap S)$, on a $n_z \leq n_a - d(z, t)$, d'où il vient que $B(z, n_z) \subset B(t, n_t) = B(t, r)$ pour t le projeté de z sur N . Finalement, pour $z \in Z - S$, si l'on pose $l := d(z, a) > 0$, on a $n_z \leq n_a - l = r - l$, de sorte que pour un tel z , $B(z, n_z)$ est inclus dans $B(a, n_a)$.

Notons au passage que pour $z \in Z - S$, $n_z < n_a$, et donc $z \notin N$, si bien que $N \cap S$ est un segment centré en a .

Ainsi, I est la réunion des $B(t, n_t) = B(t, r)$ pour t dans le segment N . C'est donc la bande de nerf N et d'épaisseur r .

(ii) Sous-cas où N rencontre S' : ce sous-cas est symétrique du précédent.

(iii) il ne reste donc que le sous-cas N ne rencontre ni S ni S' .

On a donc $N \subset X - \{a, b\}$, où a désigne l'intersection de X avec S et b celle de X avec S' . Il est clair que la fonction n_z , quand z va de a à b le long de X croit d'abord

puis décroît, et donc que N est réduit soit à un sommet t , soit à une arête (t, t') dans $X - \{a, b\}$. On en déduit facilement, en raisonnant comme en (i), que I est la bande de nerf N et d'épaisseur $n_t (= n_{t'})$.

(b) Cas où $S \cap S'$ est non vide.

On note Y l'intersection de S et S' , c'est une géodésique.

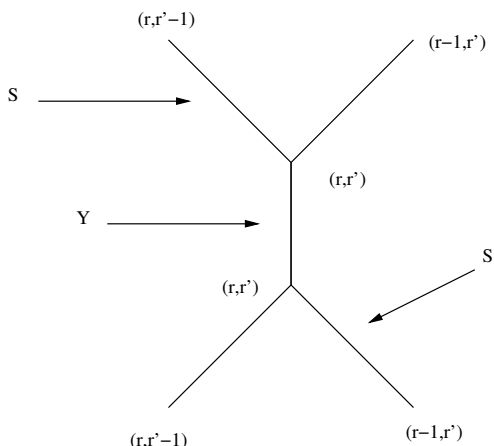


FIGURE 2. Cas $S \cap S' = Y \neq \emptyset$

Si z est dans Y , $n_z = \min(r, r')$; donc $Y \subset N$.

Supposons par exemple $r \leq r'$. On voit que si z est dans S' a distance l de Y , alors $n_z \leq r - l$. Si z n'est pas dans Y , i.e. $l > 0$, $n_z < r$ et z n'est pas dans N . Autrement dit $N \subset S$. De plus, pour un tel z , $B(z, n_z)$ est inclus dans $B(y, n_y) = B(y, r)$ pour y le projeté de z sur Y .

On est donc ramène a $I = \cup_{z \in S} B(z, n_z)$, mais comme pour $z \in S$, on voit aisément que $n_z = r - d(z, N)$, on en déduit que N est une géodésique de S , et que I est la bande $B(N, r)$.

□

On peut renforcer ce résultat :

Proposition 5. *Une intersection quelconque de bandes est une bande.*

Démonstration — Par le lemme de Zorn et la proposition précédente, on est ramené à traiter le cas d'une intersection décroissante. Il résulte de la remarque 2 que si deux bandes B et B' d'épaisseurs r et r' vérifient $B \cap B' \neq \emptyset$, on a $r \leq r'$ et en cas d'égalité, le nerf de B est inclus dans le nerf de B' . Par la proposition précédente, on est donc ramené à traiter le cas d'une intersection de bandes de même épaisseur r et de nerf décroissants. Il est clair que le résultat est la bande d'épaisseur r et de nerf l'intersection des nerfs, qui est bien une géodésique.

□

2.5. Horodisques.

Définition 6. Si D est une demi-droite d'extrémité a , on appellera *horodisque* de D la réunion $H(D)$ des boules de centre $x \in D$ et de rayon $d(x, a)$.

Notons que $D \subset H(D)$. Cependant $H(D)$ ne détermine pas D :

Lemme 7. (i) Toute demi-droite contenue dans $H(D)$ est cofinale à D .

(ii) Si D et D' sont deux demi-droites, on a $H(D) = H(D')$ si et seulement si D et D' sont cofinales, et, si a, a' et b désignent les extrémités respectives des demi-droites D, D' et $D \cap D'$, on a $d(a, b) = d(a', b)$.

Démonstration — Si $D' = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ n'est pas cofinal à D , la projection $p(x_i)$ de x_i sur D est constante pour i assez grand. Comme $d(x_i, p(x_i)) \rightarrow \infty$ quand $i \rightarrow \infty$, il existe i telle que $d(x_i, p(x_i)) \geq d(p(x_i), a)$ où a est l'extrémité de D . Donc $D' \not\subset H(D)$. Ceci prouve (i).

Si $H(D) = H(D')$, alors $D' \subset H(D)$ donc D' et D sont cofinale par (i). Avec les notations de l'énoncé, on a, puisque $a \in H(D')$, et que b est le projeté de a sur D' , $d(a, b) \leq d(a', b)$. Par symétrie, on a donc $d(a, b) = d(a', b)$. La réciproque est évidente. \square

Lemme 8. Si un horodisque H contient deux sommets a et b , la boule de diamètre $[a, b]$ est contenue dans H .

Démonstration — C'est clair, car un horodisque est par définition une union *croissante* de boules, et la propriété à montrer est évidente pour une boule. \square

Lemme 9. Si S est un sous-ensemble de T tel que pour tout a, b dans S , S contienne la boule de diamètre $[a, b]$, alors S est soit une boule, soit un horodisque, soit tout l'arbre.

Démonstration — Comme la boule de diamètre $[a, b]$ contient $[a, b]$, l'hypothèse implique en particulier que S est convexe. Soit n le nombre de bouts qui ont au moins un représentant (i.e. une demi-droite) contenu dans S .

Si $n = 0$, alors S est borné. Soit a, b dans S tel que $d(a, b)$ soit maximal. Alors S contient la boule de diamètre $[a, b]$ par hypothèse, et est contenu dans cette boule par maximalité. C'est donc une boule.

Si $n = 1$, il existe une demi-droite $D \subset S$ maximale (sinon, la réunion strictement croissante d'une famille infinie de demi-droite serait une droite contenue dans S , et S contiendrait aux moins deux bouts). Notons $D = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ avec $x_0 = a$ et $d(x_i, a) = i$. On a $H(D) \subset S$ car la boule de centre x_i et de rayon $d(x_i, a) = i$ n'est autre que la boule de diamètre $[x_0, x_{2i}]$. Montrons l'autre inclusion. Soit x dans S , x_i son projeté sur D , et posons $d = d(x, x_i)$. Par hypothèse, S contient la boule de diamètre $[x, x_{i+d}]$ qui n'est autre que la boule de centre x_i et de rayon d . Par maximalité de D , S ne contient qu'un

seul voisin de $a = x_0$ (à savoir x_1), donc $d(x_i, a) \geq d = d(x_i, x)$: on a donc $x \in H(D)$. On a prouvé $S = H(D)$.

Si $n \geq 2$, comme S est convexe, il contient une droite, et on en déduit aisément que $S = T$. \square

3. CLOS DES SOUS-GROUPES DE $GL_2(K)$

3.1. Définition et premières propriétés. Pour S un sous-ensemble de $GL_2(K)$, on note $C(S)$ l'ensemble des sommets de l'arbre T de $PGL_2(K)$ qui sont fixes par S : on l'appelle le *clos* de S . C'est une partie convexe de T , et nous allons chercher à la caractériser parmi les parties convexes de T . Notons que si G est le sous-groupe engendré par S , on a évidemment $C(G) = C(S)$.

Si C est une partie de T , on notera $\Gamma(C)$ le stabilisateur de la partie C dans $GL_2(K)$. Finalement, on notera Z le centre de $GL_2(K)$.

Lemme 10. *Si $C(G)$ est non vide, $C(G)$ est borné si et seulement si G agit irréductiblement sur K^2 .*

Démonstration — Comme $C(G)$ est convexe, il est borné si et seulement s'il ne contient pas de demi-droite. Par ailleurs, comme il est non vide, $C(G)$ contient (un représentant) d'un bout b si et seulement si G est contenu dans le Borel correspondant à ce bout. Ces deux équivalences donnent le lemme. \square

Un cas important dans les applications est celui où G est borné :

Proposition 11. *Supposons que G est un sous-groupe borné de $GL_2(K)$. Alors :*

- (a) *$C(G)$ est non vide, et tout réseau Λ représentant un sommet x de $C(G)$ est stable par G .*
- (b) *Pour tout $x \in C(G)$, Λ représentant x , et $n \geq 0$ les sous- $A/\pi^n A$ -modules libres de $\Lambda/\pi^n \Lambda$ stables par G sont en bijection canoniques avec les points de $C(G)$ à distance n de x . Pour $m \leq n$, l'image d'un sous- $A/\pi^n A$ -module libre et facteur direct, correspondant à un sommet y de l'arbre, dans $\Lambda/\pi^m \Lambda$ correspond à l'unique point de $[x, y]$ à distance m de x .*
- (c) *En particulier, pour tout $x \in C(G)$, Λ représentant x , les droites stables par la représentation de dimension 2, notée $\bar{\rho}_x$, de G sur le k -espace vectoriel $\Lambda/\pi \Lambda$ sont en bijections avec les voisins de x dans $C(G)$.*
- (d) *Pour $x \in C(G)$, on a les équivalence suivantes*
 - (i) *$\bar{\rho}_x$ irréductible si, et seulement si, x n'a pas de voisins dans $C(G)$ si, et seulement si, $C(G) = \{x\}$.*
 - (ii) *$\bar{\rho}_x$ réductible mais indécomposable si, et seulement si, x a exactement un voisin dans $C(G)$ (i.e. x est un point extrémal).*

- (iii) $\bar{\rho}_x$ est décomposable, somme de deux caractères distincts si, et seulement si, x a exactement deux voisins dans $C(G)$.
- (iv) $\bar{\rho}_x$ est décomposable, somme de deux caractères égaux si, et seulement si, tous les voisins de x dans T sont dans $C(G)$

Démonstration — C'est un exercice facile. \square

Lemme 12. (a) Si $H \subset G$, alors $C(G) \subset C(H)$.

(b) Si $(G_i)_i$ est une famille de sous-groupes de $\mathrm{PGL}_2(K)$, et G' le sous-groupe qu'ils engendrent, on a $C(G') = \bigcap_i C(G_i)$.

Démonstration — C'est évident. \square

Lemme 13. Soit $S = [x, y]$ un segment géodésique de longueur l , r un entier, et $B = B(S, r)$. Choisissons comme base de K^2 une A -base d'un réseau représentant x et dont la droite de T qui lui correspond contient le segment $[x, y]$. Dans cette base, on a

$$\Gamma(B) = Z \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(A), \quad v(\alpha - 1) \geq r, \quad v(\delta - 1) \geq r, \quad v(\beta) \geq r, \quad v(\gamma) \geq r + l \right\}.$$

Démonstration — Soit u la matrice diagonale $(1, p)$. Les points de S sont les $u^i x$, $i = 0, \dots, l$, et B est la réunion des $B(u^i x, r)$, $i = 0, \dots, l$. On a donc

$$\Gamma(B) = \bigcap_{i=0, \dots, l} \Gamma(B(u^i x, r)).$$

Or $\Gamma(B(u^i x, r)) = u^i \Gamma(B(x, r)) u^{-i}$ et il est évident que $\Gamma(B(x, r)) = Z$ fois le groupe des matrices de $\mathrm{GL}_2(A)$ congrues à l'identité modulo π^r . Le lemme en découle. \square

Proposition 14. Le sous-groupe $\Gamma(B(S, r))$ est ouvert dans $\mathrm{GL}_2(K)$ et l'on a $C(\Gamma(B(S, r))) = B(S, r)$.

Démonstration — C'est évident avec la description de $\Gamma(B(S, r))$ du lemme précédent. \square

Lemme 15. Si $C(G)$ est borné, contenu dans une boule $B(x, N)$, il existe un sous-groupe ouvert G' de $\mathrm{GL}_2(K)$, contenant G et $\Gamma(B(x, N))$ tel que $C(G) = C(G')$.

Démonstration — Il suffit de prendre pour G' le sous-groupe engendré par G et $\Gamma(B(x, N))$. \square

Proposition 16. *Si $C(G)$ est non vide et borné, alors $C(G)$ est une intersection de clos de la forme $C(x)$, où $x \in G$ est un élément semi-simple régulier de $GL_2(K)$. Si K est localement compact, on peut supposer que cette intersection est finie.*

Démonstration — Soit x un point de $C(G)$, et N un entier assez grand pour que $C \subset B(x, N) \subset B(x, N + 1)$. Par le lemme précédent, on peut supposer que G est ouvert et contient le sous-groupe de congruence $\Gamma(B(x, N + 1))$. Comme les éléments semi-simples réguliers de $GL_2(K)$ sont denses, il y en a au moins un dans chaque $\Gamma(B(x, N + 1))$ -classe à droite de G , que l'on peut donc écrire $g_i\Gamma(B(x, N + 1))$ avec g_i semi-simple régulier. Comme G est engendré par $\Gamma(B(x, N + 1))$ et les g_i , le point (b) du lemme 12 et la prop. 14 montrent que $C(G)$ est l'intersection de $B(x, N + 1)$ et du clos $\bigcap_i C(g_i)$. Comme $C(G)$ est contenu dans $B(x, N)$, il ne contient aucun point à distance $N + 1$ de x , et il en va donc de même de $\bigcap_i C(g_i)$ (car sinon ces points qui sont dans $B(x, N + 1)$ seraient aussi dans $C(G)$). On en déduit que le convexe $\bigcap_i C(g_i)$, qui contient x , est contenu dans le boule $B(x, N)$, puis que $C(G) = \bigcap_i C(g_i)$. Si K est localement compact, G est compact, et $\Gamma(B(x, N + 1))$ qui est ouvert est donc d'indice fini dans G , si bien qu'il n'y a qu'un nombre fini de g_i . \square

3.2. Clos des éléments de $GL_2(K)$. Soit $g \in GL_2(K)$ semi-simple régulier. Autrement dit, g est diagonalisable à valeurs propres distinctes soit dans K , soit dans une extension quadratique K' de K .

Lemme 17. *Si g est un élément de $GL_2(A)$ diagonal à valeurs propres distinctes a et b , $C(G)$ est la bande de nerf la droite définie par g et de rayon $v(a - b)$.*

Démonstration — Si x un point de l'appartement D défini par g , représenté par un réseau Λ , alors g est l'identité sur $\Lambda/\pi^r\Lambda$, de sorte que la boule de centre x de rayon r est dans T , ce qui fournit une inclusion.

Soit x un point fixe par g qui n'est pas dans D , $p(x)$ dans le projeté de x sur D , $s = d(x, p(x))$ et y, z les points de D à distance s de $p(x)$. Alors dans $\Lambda/\pi^s\Lambda$, les sommets $p(x), y$ et z définissent trois A/π^s -droites facteurs directes stables par g (prop. 11(ii)), distinctes même modulo π , et l'on en déduit que g est donc homothétique modulo π^s , i.e. $a = b \pmod{\pi^s}$, et donc $s \leq r$. C'est l'autre inclusion. \square

Proposition 18. *Si g un élément semi-simple régulier de $GL_2(A)$, alors son clos est une bande. Plus précisément, c'est une bande infinie si g est diagonalisable, une boule sinon.*

Démonstration — Le cas diagonalisable a déjà été traité. Supposons que g n'est pas diagonalisable. Notons a et b les valeurs propres de g , $r = v(a - b) \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$, $K' := K(a)$, A' son anneau d'entiers. Soit T' l'arbre de $PGL_2(K')$. On dispose d'une injection de T dans

T' correspondant à l'application $\Lambda \mapsto \Lambda \otimes_A A'$. Il est clair que cette injection est une isométrie (i.e. respecte la structure de graphe) si K'/K est non ramifié, et multiplie les distances par 2 si K'/K est ramifié. Dans ce dernier cas, on peut étendre cette injection et plonger naturellement DT dans T' : si $m_{x,y}$ est un point de $DT - T$, et si Λ, Λ' représentent x et y et vérifient $\Lambda' \subset \Lambda$ et $\Lambda/\Lambda' \simeq k$ as an A -module, on envoie $m_{x,y}$ sur la classe de l'unique A' -réseau L de K'^2 tel que $\Lambda' \otimes_A A' \subset L \subset \Lambda \otimes_A A'$ et $(\Lambda \otimes_A A')/L \simeq k$ as an A' -module. On obtient ainsi une injection de DT dans T' qui envoie le double de la distance d de DT sur la distance de T' .

En résumé, on a plongé T dans le cas non-ramifié, DT dans le cas ramifié, comme un sous-arbre (en particulier convexe) de T' . Dans ce dernier cas, DT est l'ensemble des points de T' à distance (de T') au plus 1 de T .

Soit s le générateur de $\text{Gal}(K'/K)$. L'élément s agit semi-linéairement sur K'^2 , donc définit un automorphisme involutif de graphe de T' . Si $x \in T'$ est fixe par s alors tous les réseaux correspondant à x le sont.

Notons $C'(g)$ l'ensemble des points fixes par g dans T' . D'après le lemme précédent, $C'(g)$ est une bande d'épaisseur r . Son intersection avec T est $C(g)$. Notons que comme $g \in \text{GL}_2(K)$, s stabilise $C'(g)$ (si hgh^{-1} est dans $\text{GL}_2(A')$, alors $s(h)gs(h)^{-1}$ aussi, i.e. $h(A'^2)$ stable si et seulement si $s(h)(A'^2)$ l'est).

Soit D le nerf de la bande $C'(g)$. Par unicité du nerf, on a $s(D) = D$. Nous avons besoin d'un lemme :

Lemme 19. *La droite D de T' contient un unique point x_0 fixe par s . Ce point est le projeté sur D de tout point de T .*

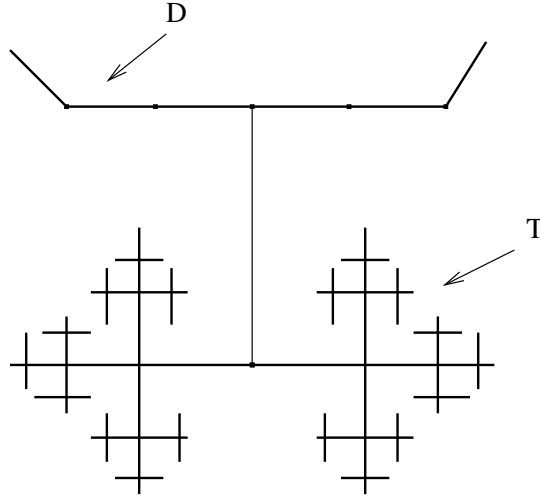
Démonstration — Comme s respecte la structure de graphe de T' , le projeté d'un point de T sur D est fixe par s , d'où l'existence d'un point fixe. L'unicité provient de ce que $s^2 = 1$, et que s ne fixe pas tout D . Par unicité, tous les points de T ont donc même projeté sur D . □

(Fin de la preuve de la prop. 18.) Définissons x_1 comme le projeté de x_0 sur DT . Soit z un point quelconque de T . Le chemin le plus court de z à D est le segment $[z, x_0]$ et, par définition, ce segment contient x_1 . Ainsi, $C(G)$ est la boule de centre x_1 de rayon $r - d(x_1, x_0)$. Ceci termine la preuve. □

Proposition 20. *Si g est un élément unipotent de $\text{GL}_2(K)$, son clos est un horodisque.*

Démonstration — Dans une certaine base e_1, e_2 , g a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

FIGURE 3. L'enveloppe convexe de $D \cup T$, cas K' ramifié

Il est clair que $C(g)$ est l'horodisque défini par la demi-droite dont les sommets sont les classes des réseaux $Ae_1 + A\pi^n e_2$, $n \geq 0$. \square

3.3. Clos des sous-groupes de $GL_2(K)$.

Théorème 21. *Soit G un sous-groupe irréductible de $GL_2(K)$. Alors $C(G)$ est une bande bornée. Réciproquement, toute bande bornée est de la forme $C(G)$ pour G un sous-groupe irréductible de $GL_2(K)$*

Démonstration — Si $C(G)$ est vide, c'est bien une bande bornée. Sinon, comme G est irréductible, $C(G)$ est borné (lemme 10), et c'est donc (prop. 16) une intersection de convexes de la forme $C(g)$ avec g semi-simple régulier. Ces convexes sont des bandes (prop. 18), et $C(G)$ est donc aussi une bande (prop. 5). Réciproquement, si B est une bande bornée, $C(\Gamma(B)) = B$ d'après la prop. 14, si bien que B est le clos du sous-groupe $\Gamma(B)$. Ce sous-groupe est irréductible d'après le lemme 10. \square

Corollaire 22. *Si G est un sous-groupe irréductible de $GL_2(K)$,*

$$C(\Gamma(C(G))) = C(G).$$

Démonstration — En effet, $C(G) = B(S, r)$ pour un certain segment S , et l'on a vu (prop. 14) que $C(\Gamma(B(S, r))) = B(S, r)$. \square

Notons également :

Proposition 23. *Si G est un sous-groupe irréductible de $\mathrm{GL}_2(K)$ dont l'adhérence est engendrée topologiquement par ses éléments unipotents, $C(G)$ est une boule.*

Démonstration — En effet, $C(G)$ est intersection de convexes de la forme $C(g)$ pour g unipotent (lemme 12), qui sont des horodisques (prop. 20). En conséquence, d'après le lemme 8, $C(G)$ vérifie la propriété que pour tout a, b dans $C(G)$ la boule de diamètre $[a, b]$ est contenue dans $C(G)$ (lemme 8). D'après le lemme 9, et comme $C(G)$ est borné d'après le lemme 10, c'est une boule. \square

Pour être complet, déterminons aussi le clos d'un sous-groupe réductible.

Proposition 24. *Soit G un sous-groupe réductible de $\mathrm{GL}_2(K)$: la représentation naturelle ρ de G est, après semi-simplification, somme de deux caractères χ_1 et $\chi_2 : G \rightarrow K^*$. Si $C(G)$ est non vide, alors :*

- (a) *Si ρ est semi-simple et $\chi_1 = \chi_2$, on a $C(G) = T$.*
- (b) *Si ρ est semi-simple et $\chi_1 \neq \chi_2$, $C(G)$ est une bande de nerf la droite correspondant à l'unique Levi contenant G .*
- (c) *Si ρ est non semi-simple et $\chi_1 = \chi_2$, $C(G)$ est un horodisque $H(D)$ où D définit le bout de T correspondant à l'unique Borel contenant G .*
- (d) *Si ρ est non semi-simple et $\chi_1 \neq \chi_2$, $C(G)$ est l'intersection d'un horodisque $H(D)$ et d'une bande de nerf D .*

Démonstration — Dans le cas (a), G est dans le centre de $\mathrm{GL}_2(K)$, donc le résultat est clair. La preuve de (b) se fait comme celle de la prop 20, celle de (c) comme celle du lemme 17, et (d) résulte de (b) et (c) puisque G peut s'écrire comme le produit de son sous-groupe unipotent maximal et d'un groupe diagonalisable. \square

4. LES INVARIANTS $n(G)$ ET $m(G)$ D'UN SOUS-GROUPE BORNÉ IRRÉDUCTIBLE G DE $\mathrm{GL}_2(K)$

4.1. Solutions des équations du second degré dans A/π^n . Soit n un entier, et a, b deux éléments de A/π^n . On considère l'équation du second degré

$$(2) \quad X^2 + aX + b = 0.$$

Cette équation peut avoir plus de deux solutions, et on cherche à les classifier. On appelle *couple de solutions conjuguées* de (2) tout couple (x, y) d'éléments de A/π^n , tous deux solutions de (2), et dont la somme est $-a$.

Lemme 25. (i) *Un couple (x, y) est un couple de solutions conjuguées de (2) si et seulement si $x + y = -a$ et $xy = b$.*

(ii) *Toute solution x de (2) est le premier terme d'un couple de solutions conjuguées de (2) et d'un seul, le couple $(x, -a - x)$.*

Démonstration — Si (x, y) est un couple de solutions conjuguées, on a $x + y = -a$ par définition, et donc $xy = x(-a - x) = -ax - x^2 = b$ puisque que x est solution de (2). Réciproquement, si $x + y = -a$ et $xy = b$, on a $x(-a - x) = b$, ce qui montre que x est solution de (2), et y l'est aussi par symétrie, si bien que (x, y) est un couple de solutions conjuguées. Ceci prouve (i). Pour (ii), l'unicité du couple de solutions conjuguées contenant a est évidente, et l'existence résulte de ce que $-x - a$ est solution de (2) si x l'est, puisque $(-x - a)^2 + a(-x - a) + b = x^2 + 2ax + a^2 - ax - a^2 + b = x^2 + ax + b = 0$. \square

Lemme 26. *Soit (x, y) un couples de solutions conjuguées de (2). Alors les autres couples de solutions conjuguées de (2) sont exactement les couples $(x + z, y - z)$ et $(y - z, x + z)$ avec $v(z) \geq \max(n/2, n - v(x - y))$.*

Démonstration — Si (x, y) est un couple de solutions conjuguées, tout autre tel couple peut s'écrire $(x + z, y - z)$ avec $z \in A/\pi^n$. Pour que ce soit effectivement un couple de solutions conjuguées, il faut et il suffit que $x + z$ soit encore solution de (2), ou encore que $(x - y)z + z^2 = 0$. Ceci peut se produire de deux façons : ou bien chacun des deux termes $(x - y)z$ et z^2 sont nuls, ce qui équivaut à la condition de l'énoncé $v(z) \geq \max(n/2, n - v(x - y))$, ou bien ils sont non nuls, auquel cas on a $v(z) = v(x - y)$ et $z = (y - x) - z'$ avec $v(z') > v(x - y)$. Mais alors notre couple $(x + z, y - z)$ s'écrit $(y - z', x + z')$ et le même raisonnement montre que $v(z') \geq \max(n/2, n - v(x - y))$. \square

Supposons dorénavant que (2) ait une solution dans A/π^n . Soit $m = m(a, b)$ le maximum des $v(x - y)$ quand (x, y) parcourt les couples de solutions conjuguées de (2), avec la convention $v(0) = n$. On a donc $m = n$ si et seulement si (2) a un couple de solutions conjuguées de la forme (x, x) .

Proposition 27. *Si 2 est inversible dans A , on a ou bien $m < n/2$, ou bien $m = n$. Pour tout couple de caractères conjugués (x, y) de (2), on a*

$$\begin{cases} v(x - y) = m & \text{si } m < n/2 \\ v(x - y) \geq n/2 & \text{si } m = n \end{cases}$$

Démonstration — Soit (x, y) un couple de solutions conjuguées tel que $v(x - y) = m$. Supposons $m \geq n/2$. Posons $z = (y - x)/2$. On a $v(z) = m \geq n/2$, et donc aussi $v(z) \geq n - v(z) = n - v(x - y)$. Par le lemme précédent, $(x + z, y - z)$ est un couple de solutions conjuguées de (2), mais comme $x + z = y - z$, on a $m = n$. La seconde assertion découle immédiatement du lemme précédent. \square

Remarque 28. La situation est différente quand 2 n'est pas inversible. Par exemple, si A/m^n est de caractéristique 2, tous les couples (x, y) de solution conjuguées satisfont $v(x - y) = m$ (même sans supposer $m < n/2$), et toutes les valeurs de m , $0 \leq m \leq n$, sont possibles.

4.2. **Les invariants $n(G)$ et $m(G)$.** On fixe maintenant un sous-groupe borné irréductible G de $GL_2(K)$.

Définition 29. On notera $n(G)$ (ou $n(\rho)$) le plus grand entier n tel qu'il existe deux caractères continus $\chi_i : G \rightarrow (A/\pi^n)^*$ satisfaisant

$$\forall g \in G, \quad \det(X - g) = (X - \chi_1(g))(X - \chi_2(g)) \pmod{\pi^n}.$$

On appellera *couple de caractères conjugués* un couple de caractères continus $\chi_1, \chi_2 : G \rightarrow A/\pi^{n(G)}$ tels que

$$\forall g \in G, \quad \det(X - g) = (X - \chi_1(g))(X - \chi_2(g)) \pmod{\pi^{n(G)}}.$$

Autrement dit, pour tout g , $(\chi_1(g), \chi_2(g))$ est un couple de solutions conjugués de l'équation caractéristique $\det(X - g) = 0$ dans $A/\pi^{n(G)}$. Notons qu'il peut y avoir plusieurs couples de caractères conjugués pour un G donné. Notons également que si K est un corps p -adique, un théorème de Lazard implique que tout caractère de G dans A/π^n est automatiquement continu. On peut donc dans ce cas enlever le mot "continu" des définitions précédentes. On pose ensuite :

Définition 30. Pour tout couple de caractères conjugués (χ_1, χ_2) de G , on notera $m(\chi_1, \chi_2)$ le plus grand entier $m \leq n(G)$ tel que pour tout g dans G ,

$$\chi_1(g) \equiv \chi_2(g) \pmod{\pi^m}.$$

On pose $m(G) = \max m(\chi_1, \chi_2)$ le maximum étant pris sur tous les couples de caractères conjugués de G .

Il est clair que l'on a

$$(3) \quad m(G) \leq n(G)$$

Plus généralement, si G est un groupe abstrait, et $\rho : G \rightarrow GL_2(K)$, on pose $m(\rho) = m(\rho(G))$ et $n(\rho) = n(\rho(G))$. L'idéal $\pi^{n(\rho)}$ mérite le nom d'*idéal de réductibilité* de ρ ; C'est le plus grand idéal modulo lequel la pseudo-représentation attachée à ρ est la somme directe de deux caractères continus. Nous appellerons donc $n(\rho)$ l'*indice de réductibilité* de ρ . Le nombre $m(\rho)$ mesure quant à lui à quel point ρ est éloigné d'être *résiduellement sans multiplicité* : cette propriété, qui est une hypothèse faite souvent dans les travaux généralisant le lemme de Ribet (cf. [5], [4], [8]), est en effet équivalente à $m(G) = 0$

Notons que $n(G)$ et $m(G)$ ne dépendent que de la classe de conjugaison de G , et donc $n(\rho)$ et $m(\rho)$ que de la classe d'équivalence de ρ .

Proposition 31. *Supposons 2 inversible dans A . On a $m(G) < n(G)/2$ ou bien $m(G) = n(G)$. Pour tout couple de caractères conjugués (χ_1, χ_2) de G , on a*

$$\begin{cases} m(\chi_1, \chi_2) = m(G) & \text{si } m(G) < n(G)/2 \\ m(\chi_1, \chi_2) \geq n(G)/2 & \text{si } m(G) = n(G) \end{cases}$$

Démonstration — Si $m(G) \geq n(G)/2$, et (χ_1, χ_2) est un couple de caractères conjugués, on voit aisément que $\chi := (\chi_1 + \chi_2)/2$ est aussi un caractère continu, et que (χ, χ) est aussi un couple de caractères conjugués. Les autres assertions découlent immédiatement de la proposition 27. \square

5. ESTIMATION DES INVARIANTS DU CLOS D'UN SOUS-GROUPE G

On fixe encore dans cette section un sous-groupe borné irréductible G de $GL_2(K)$. Rappelons que le clos $C(G)$ est une bande bornée $B(S, r)$. Une telle bande possède deux invariants : son épaisseur $r = r(G)$ et son diamètre $d = d(G) = l(S) + 2r$. Le but de cette section est de donner des encadrements de ces deux invariants *combinatoires* $r(G)$ et $d(G)$ en fonction des invariants *algébriques* $n(G)$ et $m(G)$ définis au numéro précédent. On suppose dans toute cette section que 2 est inversible dans A .

5.1. Majoration de $d(G)$ et de $r(G)$.

Proposition 32. *On a $d(G) \leq n(G)$ et $r(G) \leq m(G)$*

Démonstration — Soit $[x, y]$ un segment de $C(G)$ de longueur $d(G)$, et Λ un réseau représentant x . L'action de G sur $\Lambda/\pi^{d(G)}\Lambda$ possède un sous- $A/\pi^{d(G)}$ -module libre stable, correspondant à y , d'après la proposition 11. Autrement dit l'action de G sur $\Lambda/\pi^{d(G)}\Lambda$ se trigonalise, d'où il vient $d(G) \leq n(G)$.

Soit z un point du nerf de $C(G)$, Λ un réseau représentant z . Comme tous les points de T à distance $r(G)$ de z sont dans $C(G)$, la proposition 11 implique que tous les sous- $A/\pi^{r(G)}$ -modules libres de $\Lambda/\pi^{r(G)}\Lambda$ sont stables par l'action de G , donc que cette action est scalaire. On en déduit $r(G) \leq m(G)$. \square

5.2. Le cas résiduellement irréductible. Traitons pour l'écarter le cas trivial où ρ est résiduellement irréductible.

Lemme 33. *On a $n(G) = 0$ si et seulement si $d(G) = 0$ si et seulement si $C(G)$ est un singleton. Dans ce cas, on a également $m(G) = r(G) = 0$.*

Démonstration — C'est clair vue la proposition 11. \square

5.3. Exemples. Dans ce numéro on suppose que K est un corps local.

Exemple 34. Si $B(S, r)$ est une bande bornée, de nerf $S = [x, y]$ et de diamètre $d = l(S) + 2r$. Choisissons comme base de K^2 une A -base d'un réseau représentant x , dont la droite de T qui lui correspond contient le segment $[x, y]$. Dans cette base, posons

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL_2(A), \quad v(\alpha - 1) \geq r, \quad v(\delta - 1) \geq r, \quad v(\beta) \geq r, \quad v(\gamma) \geq r + l \right\}.$$

Alors $n(G) = d(G) = d$ et $m(G) = r(G) = r$

Démonstration — On a $\Gamma(G) = B(S, r)$, d'où $d(G) = d$ et $r(G) = r$. La proposition 32 donne $n(G) \geq d$ et $m(G) \geq r$. Considérons la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \pi^r \\ \pi^{r+l}a & 1 \end{pmatrix} \in G$, avec $a \in A$. Le polynôme caractéristique de cette matrice est $X^2 - 2X + (1 - \pi^d a)$, de discriminant $4\pi^d a$. Si l'on choisit a tel que $a \pmod{\pi}$ n'est pas un carré dans k (ou si d est impair), ce discriminant n'est pas un carré dans A/π^{d+1} , ce qui montre que le polynôme caractéristique considéré n'a pas de racine dans cet anneau, et a fortiori que $n(G) \leq d$. Donc $n(G) = d$. Définissons deux applications χ_1 (resp. χ_2) : $G \rightarrow A/\pi^d = A/\pi^{n(G)}$, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \rightarrow \alpha \pmod{\pi^d}$, (resp. $\delta \pmod{\pi^d}$). On voit aisément que χ_1 et χ_2 forment un couple de caractères conjugués de G et que $m(\chi_1, \chi_2) = r$. Comme $r \leq n(G)/2$, cela signifie d'après la proposition 31 que $m(G) = m(\chi_1, \chi_2) = r$. \square

Cet exemple montre que $m(G)$ peut prendre toutes les valeurs entières comprises entre 0 et $n(G)/2$.

Exemple 35. Soit $n \geq 0$ un entier et $G = \Gamma_1(\pi^n)$ défini comme le groupe des matrices qui sont unipotentes supérieures mod π^n . Dans ce cas $C(G)$ est une boule de diamètre n donc une bande de diamètre $d(G) = n$ et d'épaisseur $r(G) = \lfloor n/2 \rfloor$. On a $n(G) = m(G) = n$.

Démonstration — Laisée au lecteur. \square

Cet exemple montre qu'on peut avoir $m(G) \neq r(G)$.

5.4. Une minoration de $m(G)$ utilisant un élément résiduellement unipotent.

On suppose dans cette section que $n(G) \geq 1$. Le clos $C(G)$ n'est pas réduit à un point. Comme il est borné, il possède un point extrémal. Choisissons en un, noté x , et soit Λ un réseau représentant x . D'après la proposition 11, la représentation $\bar{\rho}_x$ de G sur $\Lambda/\pi\Lambda$ est réductible et indécomposable. En particulier, il existe un élément u , tel que $\bar{\rho}_x(u)$ est trigonalisable, mais non diagonalisable (autrement dit, à un scalaire près, $\bar{\rho}_x(u)$ est unipotente non triviale, d'où le titre de cette sous-section).

On fixe un couple de caractères conjugués (χ_1, χ_2) de G tel que $m(\chi_1, \chi_2) = m(G)$.

Lemme 36. Soit y est un point de T , distinct de x , et fixe par u . Posons $i = d(x, y)$. Alors il existe une base de Λ tel que dans la base de $\Lambda/\pi^i\Lambda$ déduite de celle-ci, l'action de u sur $\Lambda/\pi^i\Lambda$ soit donnée par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

avec $\alpha, \beta \in (A/\pi^i)^*$, et telle que le A/π^i -module libre engendré par le premier vecteur de la base corresponde au point y .

Démonstration — Le point y définit un sous- A/π^i -module libre de $\Lambda/\pi^i\Lambda$ qui est stable par G . On peut prendre un générateur de ce sous-module et le compléter en une base

de $\Lambda/\pi^i\Lambda$ (un sous-module libre d'un module libre sur un anneau artinien étant toujours facteur direct, cf. par exemple [3, Lemma 2.2.3]), qu'on peut relever en une base de Λ . Pour cette base, l'action de u est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

avec $\alpha, \beta \in (A/\pi^i)^*$. La réduction de γ modulo π est non nulle, sinon l'action de u sur $\Lambda/\pi\Lambda$ serait diagonalisable. Autrement dit, γ est inversible, et on peut donc changer le second vecteur de la base de manière à avoir $\gamma = 1$. \square

Lemme 37. *Quitte à échanger le rôle de χ_1 et χ_2 , il existe une base de Λ pour laquelle la matrice de u sur $\Lambda/\pi^{n(G)}\Lambda$ est*

$$\begin{pmatrix} \chi_1(u) & 1 \\ 0 & \chi_2(u) \end{pmatrix}.$$

Démonstration — Comme x a un voisin dans $C(G)$, donc stable par u , le lemme précédent, appliqué à $i = 1$, affirme qu'il existe une base de $\Lambda/\pi\Lambda$ dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Comme le polynôme caractéristique de u modulo π a pour racines $\chi_1(u)$ et $\chi_2(u)$ puisque $n(G) \geq 1$, et que A/π est un corps, on a $\alpha = \chi_1(u)$ et $\beta = \chi_2(u)$ dans A/π , quitte à échanger les rôles de χ_1 et χ_2 .

Voyons $\Lambda/\pi^{n(G)}\Lambda$ comme un module sur la sous- $A/\pi^{n(G)}$ -algèbre B de

$$\text{End}_{A/\pi^{n(G)}}(\Lambda/\pi^{n(G)}\Lambda)$$

engendrée par l'action de $u - \chi_2(u)$. Modulo π , le module $\Lambda/\pi\Lambda$ est monogène, engendré par le second vecteur de la base choisie ci-dessus. Par le lemme de Nakayama, applicable puisque π est dans le radical de B , le B -module $\Lambda/\pi^{n(G)}\Lambda$ est également monogène, engendré par un vecteur que nous appèlerons e_2 . Cela revient à dire que comme $A/\pi^{n(G)}$ -module, $\Lambda/\pi^{n(G)}\Lambda$ est engendré par e_2 et $e_1 := u(e_2) - \chi_2(u)e_2$. La famille génératrice (e_1, e_2) de $\Lambda/\pi^{n(G)}\Lambda$ en est une base sur $A/\pi^{n(G)}A$, puisque c'est un module libre de rang 2.

Dans la base (e_1, e_2) , la matrice de u a donc la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & \chi_2(u) \end{pmatrix}.$$

En écrivant que la trace de u est $\chi_1(u) + \chi_2(u)$, il vient $\alpha = \chi_1(u)$ dans $A/\pi^{n(G)}$. Puis, en écrivant que le déterminant de u est $\chi_1(u)\chi_2(u)$, il vient $\beta = 0 \in A/\pi^{n(G)}$. \square

Lemme 38. *Il existe un point z fixe par u tel que $d(x, z) = n(G)$. De plus toute l'intersection de la boule de diamètre $[x, z]$ et de la bande de nerf $[x, z]$ et de rayon $m(G)$ (c'est une bande de nerf inclus dans $[x, z]$) est fixe par u .*

Démonstration — Dans la base de $\Lambda/\pi^{n(G)}\Lambda$ donnée par le lemme précédent, le $A/\pi^{n(G)}$ -module libre engendré par e_1 est stable par u , d'où la première assertion vue la proposition 11. Soit maintenant y le point de $[x, z]$ à distance i de x , $0 \leq i \leq n(G)$. Un réseau correspondant à y est $\Lambda_y := \mathcal{O}_K e_1 + \pi^i \mathcal{O}_K e_2$. Dans la base $e_1, \pi^i e_2$ de ce réseau, la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} \chi_1(u) & \pi^i \\ \pi^{n(G)-i} b' & \chi_2(u) \end{pmatrix}$. On en déduit que la boule de centre y et de rayon $k(i) := \min(i, n(G) - i, m(G))$ est fixe par u , car la matrice de u modulo $\pi^{k(i)}$ est scalaire. Mais la réunion de ces boules est l'ensemble de l'énoncé. \square

Lemme 39. *Tout point y de T fixe par u tel que $d(x, y) \leq m(G)$ est fixe par tout G .*

Démonstration — Soit y un tel point et $i := d(x, y)$. On a donc $i \leq m(G) \leq n(G)$. Prenons pour base de $\Lambda/\pi^i\Lambda$ la réduction de la base du lemme 37. Dans cette base, on a $u = \begin{pmatrix} \chi(u) & 1 \\ 0 & \chi(u) \end{pmatrix}$, où χ est la réduction commune de χ_1 et de χ_2 modulo $\pi^{m(G)}$.

Toujours dans cette base, écrivons la matrice d'un élément $g \in G$: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Comme $i \leq m(G)$, on a dans A/π^i ,

$$\mathrm{tr}(g) = 2\chi(g), \text{ et } \mathrm{tr}(gu) = 2\chi(g)\chi(u),$$

d'où

$$\mathrm{tr}(gu) = \mathrm{tr}(g)\chi(u).$$

Par les expressions des matrices g et u , on voit que

$$\mathrm{tr}(g) = \alpha + \delta \text{ et } \mathrm{tr}(gu) = \alpha\chi(u) + \delta\chi(u) + \gamma.$$

Il vient donc $\gamma = 0$, ce qui signifie que le point y est fixe par g . \square

Proposition 40. *Pour tout x point extrémal de $C(G)$, il existe une boule de diamètre $m(G)$ dans $C(G)$ contenant x .*

Démonstration — Soit z comme dans le lemme 38 et t le point de $[x, z]$ à distance $m(G)$ de x . La boule de diamètre $[x, t]$ est dans $C(G)$. En effet, cette boule est évidemment incluse dans la bande de nerf $[x, z]$ et d'épaisseur $m(G)$, ainsi que dans la boule de diamètre $[x, z]$, donc elle est fixe par u par le lemme 38. Mais comme cette boule est également contenue dans la boule de centre x et de rayon $m(G)$, elle est fixe par G par le lemme 39. \square

5.5. Une minoration de $n(G)$ utilisant un élément diagonalisable. Fixons encore une fois un couple (χ_1, χ_2) de caractères conjugués de G et posons

$$G_i := \{g \in G, \chi_1(g) \equiv \chi_2(g) \pmod{\pi^i}\}$$

Les G_i forment une suite décroissante de sous-groupes fermés distingués de G , et on a $G_i = G$ si et seulement si $i \leq m(\chi_1, \chi_2)$.

Lemme 41. *Soit g un élément semi-simple elliptique de G , alors $g \in G_{\lceil n(G)/2 \rceil}$.*

Démonstration — Soit $P = (X - a)(X - b) \in A[X]$ le polynôme caractéristique de g , où a et b sont dans l'anneau des entiers A' d'une extension quadratique K' de K . Pour tout λ dans A , on a $v(\lambda - a) = v(\lambda - b)$ et donc $v(P(\lambda)) = 2v(\lambda - a)$.

Pour $i = 1, 2$, soit λ_i un relevé quelconque dans A de $\chi_i(g) \in A/\pi^{n(G)}$. Alors $v(P(\lambda_i)) \geq n(G)$ par définition de $n(G)$, et par le paragraphe précédent $v(P(\lambda_i)) = 2v(\lambda_i - a)$. Il vient donc $2v(\lambda_1 - \lambda_2) \geq n(G)$, i.e. $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \pmod{\pi^{\lceil n(G)/2 \rceil}}$. \square

Proposition 42. *$C(G)$ contient un segment de longueur au moins $n(G) - 2m(G)$.*

Démonstration — On peut supposer que $n(g) \geq 1$ et que $m(g) < n(g)/2$ car sinon, l'assertion à prouver est triviale. Comme le groupe $G_{m(G)+1}$ est un sous-groupe fermé propre de G , par densité des éléments semi-simples réguliers de G , il y a un tel élément qui n'est pas dans $G_{m(G)+1}$. Par le lemme précédent, un tel élément est diagonalisable : appelons-le $\delta = \text{diag}(a, b)$ dans une certaine base (e_1, e_2) de K^2 . Cette base définit une droite D de T .

Comme G est borné, a et b sont dans A . Modulo $\pi^{n(G)}$, (a, b) et $(\chi_1(\delta), \chi_2(\delta))$ sont deux couples de solutions conjuguées de l'équation caractéristique de δ , et par définition de δ , $v(\chi_1(\delta) - \chi_2(\delta)) \leq m(G) < n(G)/2$. Par la proposition 27, on en déduit, quitte à échanger les rôles de χ_1 et χ_2 , les congruences :

$$a \equiv \chi_1(\delta), b \equiv \chi_2(\delta) \pmod{\pi^{n(G)-m(G)}}.$$

Soit x une extrémité du segment $C(G) \cap D$. Quitte à changer la base (e_1, e_2) en $(\pi^t e_1, e_2)$, ce qui ne change pas la matrice de δ ni les calculs précédents, on peut supposer que le réseau $Ae_1 + Ae_2$ représente x . Soit $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G$. On a

$$\text{tr}(g) = \alpha + \delta \equiv \chi_1(g) + \chi_2(g) \pmod{\pi^{n(G)}}.$$

Mais on a aussi

$$\text{tr}(g\delta) = \alpha a + \delta b \equiv a\chi_1(\delta) + b\chi_2(\delta) \pmod{\pi^{n(G)-m(G)}},$$

et

$$\text{tr}(g\delta) \equiv \chi_1(g\delta) + \chi_2(g\delta) \pmod{\pi^{n(G)}}.$$

On a donc un système de congruences modulo $\pi^{n(G)-m(G)}$, qui se traduit par le fait que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

envoie les deux vecteurs colonnes ${}^t(\alpha, \delta)$ et ${}^t(\chi_1(g), \chi_2(g))$ sur le même vecteur. Comme cette matrice a pour déterminant $b-a$ qui est de valuation (au plus) $m(G)$, on en déduit :

$$\alpha \equiv \chi_1(g), \quad \delta \equiv \chi_2(g) \pmod{\pi^{n(G)-2m(G)}}.$$

On conclut suivant un argument standard : soit $g' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \in G$. On obtient en multipliant les précédentes congruences pour g et g' :

$$\alpha\alpha' \equiv \chi_1(g)\chi_1(g') \pmod{\pi^{n(G)-2m(G)}}$$

et en appliquant le même congruence à gg' :

$$\alpha\alpha' + \beta\gamma' \equiv \chi_1(gg') \pmod{\pi^{n(G)-2m(G)}}$$

d'où

$$\beta\gamma' \equiv 0 \pmod{\pi^{n(G)-2m(G)}}.$$

Comme x est au bord du segment, on peut trouver une matrice g tel que β est inversible. On en déduit que pour tout $g' \in G$, $\gamma' \in \pi^{n(G)-2m(G)}A$, ce qui montre que $C(G) \cap D$ est un segment de longueur au moins $n(G) - 2m(G)$. \square

Scholie 43. *Si $\delta \in G - G_{m(G)+1}$, alors δ est diagonalisable, et si D est la droite de l'arbre T correspondant à δ , le segment $C(G) \cap D$ est de longueur au moins au moins $n(G) - 2m(G)$.*

5.6. Une minoration de $n(G)$ combinant les deux méthodes précédentes. La méthode précédente donne une minoration de $d(G)$ qui est bonne quand $m(G)$ n'est pas trop grand par rapport à $n(G)/2$, mais qui est insuffisante pour montrer que $d(G)$ tend vers l'infini avec $n(G)$, qui est le point essentiel pour les applications. Nous en donnons donc une autre, qui est meilleure quand $m(g)$ est proche de $n(G)/2$.

Proposition 44. *On suppose $1 \leq m(G) < n(G)/2$. Alors $d(G) \geq n(G)/2$.*

Démonstration — D'après la sous-section précédente, les éléments diagonalisables qui ne sont pas dans $G_{m(G)+1}$ sont denses dans G . Le clos $C(G)$ est donc intersection des clos de ces éléments, qui sont des bandes de nerf une droite et d'épaisseur $m(G)$. Comme un point dans une telle bande est soit extrémal, soit intérieur (i.e. tous ses voisins sont dans la bande), on voit que tout point extrémal x de $C(G)$ est aussi point extrémal d'une bande $C(\delta)$ pour un $\delta \in G - G_{m(G)+1}$ diagonalisable.

On choisit un x extrémal dans $C(G)$, et un δ comme ci-dessus, si bien que x est un point extrémal de la bande $C(\delta)$ qui est d'épaisseur $m(G)$. Par le lemme 38 appliqué à $u = \delta$ (ce qui est permis, car $\bar{\rho}_x(\delta)$ est trigonalisable, puisque $\rho(\delta)$ l'est, mais pas

diagonalisable, puisque x est au bord de $C(\delta)$, il existe un point t à distance $m(G)$ de x , et tel que $B(t, m(G)) \subset C(\delta)$ (prendre pour t le point à distance $m(G)$ de x sur le segment $[x, z]$ avec z donné par le lemme 38). On en déduit que t est dans le nerf D de la bande $C(\delta)$, et que $[x, t] \cap D = \{t\}$. De plus, par le lemme 39, $t \in C(G)$.

Mais, par la proposition 42 (cf. la scholie qui la suit), le segment $D \cap C(G)$ est un segment de longueur au moins $n(G) - 2m(G)$. Soit y le point de ce segment qui est le plus éloigné de t . On a donc $d(t, y) \geq n(G)/2 - m(G)$. Mais comme $[x, t]$ et $[z, t]$ n'ont pas d'intersection à part t , on a $d(x, y) = d(x, t) + d(t, y)$, et donc $d(x, y) \geq m(G) + n(G)/2 - m(G) = n(G)/2$. Comme x et y sont dans $C(G)$, le diamètre de $C(G)$ est bien $\geq n(G)/2$. \square

5.7. Synthèse.

Théorème 45. *Si $m(G) = n(G)$, $C(G)$ est une boule de diamètre $n(G)$, et l'on a $d(G) = n(G)$, $r(G) = \lfloor m(G)/2 \rfloor$. Si $m(G) < n(G)/2$, alors on a*

$$\max(n(G)/2, n(G) - 2m(G)) \leq d(G) \leq n(G)$$

et

$$\lfloor m(G)/2 \rfloor \leq r(G) \leq m(G).$$

Démonstration — Si $n(G) = 0$, les inégalités à prouver sont triviales. Supposons donc $n(G) \geq 1$. On a $r(G) \leq m(G)$ et $d(G) \leq n(G)$. Or on a vu (prop. 40) que $C(G)$ contenait une boule de diamètre $m(G)$. Quand $m(G) = n(G)$, cela implique $d(G) = n(G) = m(G)$, et que C est une boule de diamètre $n(G)$, donc d'épaisseur. Supposons donc $m(G) < n(G)/2$. Alors $\lfloor m(G)/2 \rfloor \leq r(G)$ puisque $C(G)$ contient une boule de diamètre $m(G)$. Par ailleurs $d(G) > n(G) - 2m(G)$ par la proposition 42. Il reste à prouver que $d(G) \geq n(G)/2$, ce qui résulte de l'inégalité précédente quand $m(G) = 0$, et de la proposition 44 quand $m(G) \geq 1$. \square

Question. A-t-on toujours $d(G) = n(G)$? Nos résultats ne l'excluent pas, mais si c'est vrai, cela semble difficile à prouver.

6. APPLICATIONS

Le résultat suivant est une généralisation du lemme de Ribet ([6]) :

Théorème 46. *Supposons que 2 est inversible dans A . Si $\rho : G \rightarrow GL_2(K)$ est une représentation continue d'image bornée irréductible, tel qu'il existe $n \geq 0$ et deux caractères continus χ_1 et $\chi_2 : G \rightarrow (A/\pi^n)^*$, tels que $\det(X - \rho(g)) = (X - \chi_1(g))(X - \chi_2(g)) \pmod{\pi^n}$ pour tout $g \in G$, alors il existe un réseau Λ stable par ρ tel que $\Lambda/\pi^{\lfloor n/2 \rfloor} \Lambda$ soit une extension de χ_1 par χ_2 non scindée modulo π (autrement dit, définissent un sous- $A/\pi^{\lfloor n/2 \rfloor}$ -module libre de $\text{Ext}_G(\chi_1, \chi_2)$).*

C'est clair vu la théorème 45 et la prop. 11. Le cas $n = 1$ est le lemme de Ribet original.

Théorème 47. *Supposons que 2 est inversible dans A . Soit ρ_k une suite de représentations continues $G \rightarrow \mathrm{GL}_2(K)$. On suppose qu'il existe deux caractères continus χ_1 et $\chi_2 : G \rightarrow A^*$ tel que $\mathrm{tr}(\rho_k)$ converge vers $\chi_1 + \chi_2$, uniformément sur G (i.e. ρ_k converge en trace au sens de [2]). Alors il existe un choix de bases pour tout k de K^2 , tel que la matrice de ρ_k dans la base choisie converge vers la matrice $\mathrm{diag}(\chi_1, \chi_2)$ uniformément en g (autrement dit, ρ_k converge physiquement au sens de [2]).*

Remarque 48. Dans [2], on montre ce même résultat avec l'hypothèse de multiplicité un $\chi_1 \neq \chi_2$ (en dimension quelconque, et pour tout corps K valué complet). Contrairement à toutes les autres hypothèses des théorèmes de [2], dont la nécessité est prouvée par des exemples *loc. cit.*, il est dit dans cet article que cette hypothèse de multiplicité un n'est vraisemblablement pas nécessaire. Ce corollaire en donne la preuve en dimension 2.

Démonstration — Pour k assez grand, les $\mathrm{tr}(\rho_k)$ sont dans A , d'où l'on déduit aisément que ρ_n est d'image bornée. L'hypothèse implique $n(\rho_k(G))$ tend vers l'infini avec k . Les diamètres d_k des bandes $C(\rho_k)$ tendent donc également vers l'infini avec k d'après le théorème 45. On peut donc trouver des points x_k dans $C(\rho_k(G))$ milieu de segments $[y_k, z_k]$ de longueur d_k tendant vers l'infini. Pour chaque k , on choisit une base de K^2 qui engendre un réseau correspondant au point x_k , et qui correspond à une droite de T contenant le segment $[y_k, z_k]$. Dans une telle base, la matrice de $\rho_k(g)$ a pour tout g ses coefficients non diagonaux de valuation au moins $\lfloor d_k/2 \rfloor$. On conclut facilement. \square

RÉFÉRENCES

- [1] J. Bellaïche, *À propos d'un lemme de Ribet*, Rendiconti del seminario dell'universita di Padova 109 (2003), 47–62.
- [2] J. Bellaïche, G. Chenevier, C. Khare & M. Larsen, *Converging sequences of p -adic Galois representations and density theorems*, Int. Math. Res. Notices 59 (2005).
- [3] J. Bellaïche & G. Chenevier, *Families of Galois representations and Selmer groups*, Asterisque 324 (2009)
- [4] J. Bellaïche & P. Graftieaux, *Représentations sur un anneau de valuation discrète complet*, Math. Annalen, American Journal of Math. 128 (2006), no 2, 271-309
- [5] B. Mazur & A. Wiles, *The class field of abelian extensions of \mathbb{Q}* , Inv. Math. 76 no.2 (1984), 179–330.
- [6] K. Ribet, *A modular construction of unramified extensions of $\mathbb{Q}(\zeta_p)$* , Inv. Math. 34(3) (1976), 151–162.
- [7] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2* , Astérisque 46, Société mathématique de France (1977).
- [8] E. Urban, *On residually reducible representations on local rings*, J. Algebra 212 (1999), 738–742.

JOËL BELLAÏCHE, BRANDEIS UNIVERSITY, 415 SOUTH STREET WALTHAM, MA, 02453, ÉTATS-UNIS

E-mail address: `jbellaic@brandeis.edu`

GAËTAN CHENEVIER, CENTRE DE MATHÉMATIQUES LAURENT SCHWARTZ, ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 91128 PALAISEAU, FRANCE

E-mail address: `chenevier@math.polytechnique.fr`